Schulinterner Lehrplan
zum Kernlehrplan für die gymnasiale Oberstufe

Mathematik

Beschlussversion vom 28.08.2018
Vorwort und Inhaltsverzeichnis ergänzt am 15.09.2023

Einführung

Das Gymnasium Augustinianum ist das einzige städtische Gymnasium in der im schönen Münsterland gelegenen Stadt Greven (fast 40.000 Einwohner*innen). Vor Ort gibt es neben dem Augustinianum fünf Grundschulen, zudem eine Förderschule, eine Realschule und eine Gesamtschule. Die nächsten Gymnasien befinden sich in Emsdetten und Münster.

In Übereinstimmung mit dem Schulprogramm zielt das Fach Mathematik am Gymnasium Augustinianum darauf ab, die persönliche Entwicklung in sozialer Verantwortung aller am Schulleben beteiligten Personen gewissenhaft in den Blick zu nehmen und alle Lernenden bestmöglich zu fördern. Es ist uns ein wichtiges Anliegen, Lernen in eigener Verantwortung aktiv erfahrbar zu machen.

Der Mathematikunterricht am Gymnasium Augustinianum möchte den Schüler*innen „Grunderfahrungen der Mathematik“ (H. Winter) ermöglichen: Sie sollen Erscheinungen aus Natur, Gesellschaft und Kultur aus mathematischer Sicht wahrnehmen und verstehen, Mathematik als ein gedankliches System eigener Art kennen lernen und begreifen sowie Fähigkeiten zur Problemlösung erwerben. Darüber hinaus sind selbstständiges Arbeiten und das soziale Lernen natürlich besonders wichtig.

Durch das Lernen mit verschiedenen - auch digitalen - Medien in unterschiedlichen Sozialformen und unter Berücksichtigung individueller Lernwege werden altersgerecht Aufgeschlossenheit und Neugier geweckt und Schüler*innen zu eigenständigem Handeln angeleitet. An Problemstellungen werden vorhandene Kenntnisse selbstständiger Lern- und Denkstrategien aufgegriffen und weiterentwickelt.

Rahmenbedingungen

Von den Lehrkräften besitzen alle die Fakultas für die Sekundarstufe I und ein großer Teil der Lehrkräfte zusätzlich die Fakultas für die Sekundarstufe II. Alle Kolleg*innen aus der Sekundarstufe II unterrichten ebenfalls in der Sekundarstufe I.
Die Fachkonferenz tritt mindestens zweimal pro Schuljahr zusammen, um notwendige Absprachen zu treffen. Zusätzlich treffen sich Kolleg*innen der Fachschaft bei Studientagen oder Dienstbesprechungen. Austausch findet auch digital über IServ oder mithilfe von TaskCards statt.

Fachliches und Individuelles Lernen

In der Sekundarstufe II arbeiten wir mit dem Unterrichtswerk Lambacher Schweizer aus dem Klett-Verlag. Wir orientieren uns bei der Planung unseres Unterrichts am Minimalfahrplan des Assistenten, um von dort ausgehend mithilfe des differenzierenden Aufgaben- und Übungsmaterials individuell zu fördern und zu fordern.

Wir setzen den TI nspire CX als grafikfähigen Taschenrechner im Unterricht und in Klausuren ein, die wir in der Regel aufgeteilt in zwei Teile stellen (hilfsmittelfrei, mit Hilfsmitteln)

Für die Leistungsbewertung hat die Fachschaft gemeinsame Kriterien in einem eigenen Dokument festgehalten, das auch auf der Homepage veröffentlicht wird.

Den im Schulprogramm ausgewiesenen Zielen, Schüler*innen ihren Begabungen und Neigungen entsprechend individuell zu fördern und ihnen Orientierung für ihren weiteren Lebensweg zu geben, fühlt sich die Fachgruppe Mathematik in besonderer Weise verpflichtet.

Förderunterricht findet in der Oberstufe im Rahmen der anwählbaren Vertiefungskurse statt. Die Fachschaft Mathematik hat für jedes Quartal Themen mit besonderem Förderbedarf identifiziert und dazu passende Materialien entwickelt oder zusammengestellt (Trainingseinheiten), die als Grundlage für die Aufarbeitung fachlicher Schwierigkeiten dienen.

Wir ermöglichen und unterstützen wir die Teilnahme an verschiedenen Wettbewerben: Känguru-Wettbewerb, Mathematik-Olympiade und Bolyai-Wettbwerb.

2.1.1 Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben

<table>
<tr><th colspan="2">EINFÜHRUNGSPHASE</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben I:</u>

Thema:
Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext (E-A1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Grundlegende Eigenschaften von Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen

Zeitbedarf: 15 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben II:</u>

Thema:
Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A2)

Zentrale Kompetenzen:
• Argumentieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Grundverständnis des Ableitungsbegriffs
• Ableitungsregeln für Potenzfunktionen

Zeitbedarf: 12 Std.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben III:</u>

Thema:
Von den Potenzfunktionen zu den ganzrationalen Funktionen, Entwicklung von Kriterien zur Untersuchung ganzrationaler Funktionen (E-A3)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen
• Argumentieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

Zeitbedarf: 12 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben IV:</u>

Thema:
Anwendung und Weiterentwicklung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A4)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen
• Argumentieren

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

Zeitbedarf: 12 Std.</td></tr>
</table>

Einführungsphase Fortsetzung	
<u>Unterrichtsvorhaben V:</u> **Thema:** *Simulation, Experimente und Daten für die Begriffsbildung beim Wiedereinstieg in die Stochastik in der Oberstufe (E-S1)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Mehrstufige Zufallsexperimente • Erwartungswert (von Zufallsgrößen) **Zeitbedarf:** 9 Std.	*<u>Unterrichtsvorhaben VI:</u>* **Thema**: *Stochastische Modellbildung, Unabhängigkeit und Abhängigkeit (E-S2)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Kommunizieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Bedingte Wahrscheinlichkeiten **Zeitbedarf:** 9 Std.
<u>Unterrichtsvorhaben VII:</u> **Thema**: *Unterwegs in 3D – Mathematische Betrachtungen des Raumes (E-G1)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Kommunizieren **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Koordinatisierungen des Raumes **Zeitbedarf**: 6 Std.	*<u>Unterrichtsvorhaben VIII:</u>* **Thema**: *Vektoren zur Darstellung von Bewegungen im Raum (E-G2)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Kommunizieren • Argumentieren **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Vektoren und Vektoroperationen **Zeitbedarf**: 9 Std.
<u>Summe Einführungsphase: 84 Stunden</u>	

<table>
<tr><th colspan="2">QUALIFIKATIONSPHASE – GRUNDKURS</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben I:</u>

Thema:
Auf Kollisionskurs? – Beschreibung von Bewegungen und Situationen durch Geraden sowie Untersuchung von Lagebeziehungen (Q-GK-G1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Argumentieren
• Kommunizieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Geraden)
• Lineare Gleichungssysteme
Zeitbedarf: 10 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben II:</u>

Thema:
Alles senkrecht? – Skalarprodukt zur Untersuchung auf Orthogonalität und Winkel (Q-GK-G2)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Skalarprodukt

Zeitbedarf: 5 Std.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben III:</u>

Thema:
Lineare Algebra zur Lösung geometrischer Probleme (Ebenen) (Q-GK-G3)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Ebenen)
• Lineare Gleichungssysteme

Zeitbedarf: 14 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben IV:</u>

Thema:
Eigenschaften von Funktionen (Höhere Ableitungen, Besondere Punkte von Funktionsgraphen, Funktionen bestimmen, Parameter) (Q-GK-A1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren, Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Fortführung der Differentialrechnung
• Funktionen als mathematische Modelle

Zeitbedarf: 20 Std.</td></tr>
</table>

Qualifikationsphase – Grundkurs (Fortsetzung)	
Unterrichtsvorhaben V: **Thema**: *Das Integral, ein Schlüsselkonzept (Von der Änderungsrate zum Bestand, Integral- und Flächeninhalt) (Q-GK-A2)* **Zentrale Kompetenzen:** • Kommunizieren, Argumentieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Grundverständnis des Integralbegriffs • Integralrechnung **Zeitbedarf**: 15 Std.	*Unterrichtsvorhaben VI:* **Thema**: *Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Binomialverteilung (Q-GK-S1)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen • Argumentieren • Kommunizieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen • Binomialverteilung **Zeitbedarf**: 17 Std.
Unterrichtsvorhaben VII: **Thema**: *Exponentialfunktion (und Ableitungen) (Q-GK-A3)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Fortführung der Differentialrechnung **Zeitbedarf**: 11 Std.	*Unterrichtsvorhaben VIII:* **Thema**: *Untersuchung zusammengesetzter Funktionen (Produktregel, Kettenregel) (Q-GK-A4)* **Zentrale Kompetenzen:** • Argumentieren • Modellieren, Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Funktionen als mathematische Modelle • Fortführung der Differentialrechnung • Integralrechnung **Zeitbedarf**: 12 Std.

Qualifikationsphase – Grundkurs (Fortsetzung)	
Unterrichtsvorhaben IX: **Thema**: *Stochastische Prozesse (Q-GK-S2)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Stochastische Prozesse **Zeitbedarf**: 8 Std.	
Summe Qualifikationsphase – Grundkurs: 112 Stunden (ca. 140 möglich!)	

<table>
<tr><th colspan="2">QUALIFIKATIONSPHASE – LEISTUNGSKURS</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben V:</u>

Thema:
Auf Kollisionskurs? – Beschreibung von Bewegungen und Situationen durch Geraden sowie Untersuchung von Lagebeziehungen (Q-LK-G1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Argumentieren
• Kommunizieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Geraden)
• Lineare Gleichungssysteme
Zeitbedarf: 10 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben VI:</u>

Thema:
Alles senkrecht? – Skalarprodukt zur Untersuchung auf Orthogonalität und Winkel (Q-LK-G2)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Skalarprodukt

Zeitbedarf: 4 Std.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben VII:</u>

Thema:
Lineare Algebra zur Lösung geometrischer Probleme (Ebenen) (Q-LK-G3)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Ebenen)
• Lineare Gleichungssysteme

Zeitbedarf: 14 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben VIII:</u>

Thema:
Weit oder nah? – Bestimmung von Abständen zwischen geometrischen Objekten (Q-LK-G4)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen
• Kommunizieren
• Argumentieren

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Vektoren und Vektoroperationen

Zeitbedarf: 12 Std.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Qualifikationsphase – Leistungskurs (Fortsetzung)</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben I:</u>

Thema:
Eigenschaften von Funktionen (Höhere Ableitungen, Besondere Punkte von Funktionsgraphen, Funktionen bestimmen, Parameter) (Q-LK-A1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren, Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Fortführung der Differentialrechnung
• Funktionen als mathematische Modelle

Zeitbedarf: 23 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben II:</u>

Thema:
Das Integral, ein Schlüsselkonzept (Von der Änderungsrate zum Bestand, Integral- und Flächeninhalt, Integralfunktion) (Q-LK-A2)

Zentrale Kompetenzen:
• Kommunizieren, Argumentieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
• Grundverständnis des Integralbegriffs
• Integralrechnung

Zeitbedarf: 24 Std.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben IX:</u>

Thema:
Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Binomialverteilung, Testen von Hypothesen (Q-LK-S1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Problemlösen
• Argumentieren
• Kommunizieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
• Binomialverteilung
• Testen von Hypothesen

Zeitbedarf: 31 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben III:</u>

Thema:
Exponentialfunktion (natürlicher Logarithmus, Ableitungen) (Q-LK-A3)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Fortführung der Differentialrechnung

Zeitbedarf: 20 Std.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Qualifikationsphase Fortsetzung</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben IV:</u>

Thema:
Untersuchung zusammengesetzter Funktionen (Produktregel, Kettenregel) (Q-LK-A4)

Zentrale Kompetenzen:
Argumentieren
Modellieren, Problemlösen
Werkzeuge nutzen
Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
Funktionen als mathematische Modelle
Fortführung der Differentialrechnung
Integralrechnung
Zeitbedarf: 24 Std.</td>
<td><u>Unterrichtsvorhaben X:</u>

Thema:
Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Normalverteilung, Testen von Hypothesen (Q-LK-S2)

Zentrale Kompetenzen:
Modellieren
Problemlösen
Kommunizieren
Werkzeuge nutzen
Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
Normalverteilung
Zeitbedarf: 10 Std.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben XI:</u>

Thema:
Stochastische Prozesse (Q-LK-S3)

Zentrale Kompetenzen:
Modellieren
Problemlösen
Werkzeuge nutzen
Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
Stochastische Prozesse
Zeitbedarf: 8 Std.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Summe Qualifikationsphase – Leistungskurs: 180 Stunden (ca. 230 möglich!)</u></td></tr>
</table>

Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

EP		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	E-A1	15
II	E-A2	12
III	E-A3	12
IV	E-A4	12
V	E-S1	9
VI	E-S2	9
VII	E-G1	6
VIII	E-G2	9
	Summe:	84
Q1 Grundkurse		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-GK-G1	10
II	Q-GK-G2	5
III	Q-GK-G3	14
IV	Q-GK-A1	20
V	Q-GK-A2	15
VI	Q-GK-S1	mind. 6 (17 insg.)
	Summe:	70-81
Q2 Grundkurse		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
VI (Fortführung)	Q-GK-S1	Rest von 17 (max. 11)
VII	Q-GK-A3	11
VIII	Q-GK-A4	12
IX	Q-GK-S2	8
	Summe:	31-42
Q1 Leistungskurse		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-LK-G1	10
II	Q-LK-G2	4
III	Q-LK-G3	14
IV	Q-LK-G4	12
V	Q-LK-A1	23
VI	Q-LK-A2	24
VII	Q-LK-S1	mind. 15 (31 insg.)
	Summe:	102-118
Q2 Leistungskurse		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
VII (Fortführung)	Q-LK-S1	Rest von 31 (max. 16)
VIII	Q-LK-A3	20
IX	Q-LK-A4	24
X	Q-LK-S2	10
XI	Q-LK-S3	8
	Summe:	62-78

Im „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben“ (Kapitel 2.1.1) wird die Verteilung der Unterrichtsvorhaben dargestellt. Sie ist laut Beschluss der Fachkonferenz verbindlich für die Unterrichtsvorhaben I, II und III der Einführungsphase und für die Unterrichtsphasen der Qualifikationsphase. Die zeitliche Abfolge der Unterrichtsvorhaben IV bis VIII der Einführungsphase ist jeweils auf die Vorgaben zur Zentralen Klausur abzustimmen.**2.1.2**

Konkretisierte Unterrichtsvorhaben

Hinweis: Thema, Inhaltsfelder, inhaltliche Schwerpunkte und Kompetenzen hat die Fachkonferenz des Gymnasiums Augustinianum Greven verbindlich vereinbart. In allen anderen Bereichen sind Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bei der Konkretisierung der Unterrichtsvorhaben möglich. *Darüber hinaus enthält dieser schulinterne Lehrplan in den Kapiteln 2.2 bis 2.4 übergreifende sowie z. T. auch jahrgangsbezogene Absprachen zur fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit, zur Leistungsbewertung und zur Leistungsrückmeldung. Je nach internem Steuerungsbedarf können solche Absprachen auch vorhabenbezogen vorgenommen werden.*

Vorhabenbezogene Konkretisierung:

Einführungsphase Funktionen und Analysis (A)

<table>
<tr><th colspan="2">THEMA: BESCHREIBUNG DER EIGENSCHAFTEN VON FUNKTIONEN UND DEREN NUTZUNG IM KONTEXT (E-A1)</th></tr>
<tr><th>ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN</th><th>VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN</th></tr>
<tr><td>
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN:
Die Schülerinnen und Schüler

beschreiben die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten sowie von quadratischen und kubischen Wurzelfunktionen
beschreiben Wachstumsprozesse mithilfe linearer Funktionen und Exponentialfunktionen
wenden einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf Funktionen (Sinusfunktion, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen) an und deuten die zugehörigen Parameter

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler

erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler

nutzen Tabellenkalkulation, Funktionenplotter und grafikfähige Taschenrechner (um Gleichungen zu lösen, Graphen zu zeichnen, Parameter zu verändern und Nullstellen zu bestimmen, Eigenschaften der Funktion kennenlernen, etc.; Stichwort: Graphen analysieren)
verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
… Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle
… zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen

</td><td>
Algebraische Rechentechniken werden grundsätzlich parallel vermittelt und diagnosegestützt geübt. Z.B. Langzeithausaufgabe
Material zur Erfassung der Lernausgangslage?
Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung in die elementaren Bedienkompetenzen der verwendeten Software und des GTR gerichtet werden.
Wh. Quadratische Funktionen mit Schwerpunkten Textverständnis (Mathematisieren, z.B. Nullstellen im Sachzusammenhang) und Transformationen
… mit Ausweitung auf Sinusfunktion und Exponentialfunktionen

Systematisches Erkunden mithilfe des GTR eröffnet den Zugang zu Potenzfunktionen.
Potenzfunktionen (auch ganzzahlig), Eigenschaften (Symmetrie, Unendlich)
Wurzelfunktionen
Wachstumsprozesse: lin. und exp. Funktionen (Wh. & Vertiefung der LU 12 aus der Jg. 9)

Material:

Ggf. Material zum Funktionsbegriff (Lernausgangslage), z.B. aus MB8 (B), LU 15
quadratische: MB8 (Ausgabe B), LU23 (Auswahl), AH S. 48 (Training GTR, zu quadr. Funktionen), LU 24: S. 103 Nr. 9, 10: Quadr. Regression mit dem GTR!
Zusatzmaterial mathbuch9+ zu quadr. Funktionen (Transformationen)
Potenzfunktionen: Zusammenstellen aus Ausgaben B MB4 und MB5 inkl. AH, mit GTR-Bezug, inkl. Transformationen
Wachstum: Wh. aus der 9 sowie Ausgabe B MB5 LU18 (Bevölkerungsw. und Zinseszins, GTR-Bezug, rekursive und explizite Berechnung), ggf. LU26: Beschränktes Wachstum (Differenzierung)
zu Wachstum: Wh-Material lineare Funktionen (Differenzierung)
Sinus: aus neuem LS

</td></tr>
</table>

THEMA: VON DER DURCHSCHNITTLICHEN ZUR LOKALEN ÄNDERUNGSRATE (E-A2)

<table>
<tr><th>ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN</th><th>VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN</th></tr>
<tr><td>
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN:
Die Schülerinnen und Schüler

berechnen durchschnittliche und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Kontext
erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate
deuten die Tangente als Grenzlage einer Folge von Sekanten
deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate/ Tangentensteigung
beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion)
leiten Funktionen graphisch ab
begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen
nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):
Argumentieren (Vermuten)
Die Schülerinnen und Schüler

stellen Vermutungen auf
unterstützen Vermutungen beispielgebunden
präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler

verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
… Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle
… grafischen Messen von Steigungen
nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen (Tangenten einzeichnen, Steigungen anzeigen lassen, Ableitungen an einer Stelle berechnen lassen, Extrema bestimmen)

</td><td>
Arbeitsblätter (z.T. zum Selbstlernen, mit Lösungen):

Geschwindigkeit, Steigung, Ableitung
Zusammenfassung: Geschwindigkeit, Steigung, Ableitung
Vom Graphen einer Funktion zu ihrem Ableitungsgraphen
Die Steigung eines Graphen durch »Zoomen« näherungsweise berechnen
Ableitungen (Steigungen)
Die Ableitung einer Potenzfunktion
Monotonie (Steigungsverhalten) und Ableitungsgraph
Noch einmal Monotonie
Minima und Maxima – Extremstellen und Extremwerte bestimmen

Zunächst: Weg-Zeit-Diagramme im Hinblick auf Geschwindigkeit, eher am Ende Übertragung auf andere Kontexte.

Der GTR wird bei der Entwicklung des Ableitungsbegriffs zentral eingesetzt: „Zoomen“.

Tabellenkalkulation und Dynamische-Geometrie-Software (beides mit GTR) werden zur numerischen und geometrischen Darstellung des Grenzprozesses beim Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekanten zur Tangenten (Zoomen) eingesetzt.

Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise zum Vermuten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden. Hier ist auch der Ort, den Begriff des Extrempunktes (lokal vs. global) zu präzisieren und dabei auch Sonderfälle, wie eine konstante Funktion, zu betrachten, während eine Untersuchung der Änderung von Änderungen erst zu einem späteren Zeitpunkt des Unterrichts (Q1) vorgesehen ist.
</td></tr>
</table>

THEMA: VON DEN POTENZFUNKTIONEN ZU DEN GANZRATIONALEN FUNKTIONEN, ENTWICKLUNG VON KRITERIEN ZUR UNTERSUCHUNG GANZRATIONALER FUNKTIONEN (E-A3)

<table>
<tr><th>ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN</th><th>VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN</th></tr>
<tr><td>
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN:
Die Schülerinnen und Schüler
• vgl. vorheriges Modul
• wenden die Summen- und Faktorregel auf ganzrationale Funktionen an

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):
Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler
• analysieren und strukturieren die Problemsituation (Erkunden)
• erkennen Muster und Beziehungen (Erkunden)
• wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus (Lösen)

Argumentieren
Die Schülerinnen und Schüler
• präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten)
• nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen)
• überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen)

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
… Lösen von Gleichungen
… zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
(charakteristische Eigenschaften und Punkte mit dem GTR bestimmen, Ableitungen berechnen, Sachzusammenhänge und Daten modeliieren (z.B.Wertetabellen))
</td><td>
Die Motivation zur Beschäftigung mit Polynomfunktionen soll durch eine Optimierungsaufgabe geweckt werden. Die verschiedenen Möglichkeiten, eine Schachtel aus einem DIN-A4-Blatt herzustellen, führen insbesondere auf Polynomfunktionen vom Grad 3. Hier können sich alle bislang erarbeiteten Regeln bewähren.

Ganzrationale Funktionen vom Grad 3 werden Gegenstand einer qualitativen Erkundung mit dem GTR, wobei Parameter gezielt variiert werden. Bei der Klassifizierung der Formen können die Begriffe aus Unterrichtsvorhaben II (Thema E-A2) eingesetzt werden. Zusätzlich werden die Symmetrie zum Ursprung und das Globalverhalten untersucht. Die Vorteile einer Darstellung mithilfe von Linearfaktoren und die Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle werden hier thematisiert.

Durch gleichzeitiges Visualisieren der Ableitungsfunktion erklären Lernende die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen 3. Grades durch die Eigenschaften der ihnen vertrauten quadratischen Funktionen. Zugleich entdecken sie die Zusammenhänge zwischen charakteristischen Punkten, woran in Unterrichtsvorhaben IV (Thema E-A4) angeknüpft wird.

AB: Extremstellen und Extremwerte bestimmen – Anwendungen
Auf ausgewogenes Verhältnis zwischen inner- und außermathematischen Untersuchungen sowie zwischen hilfsmittelfreie und hilfsmittelunterstützte Phasen achten!

Systematisierung: Ableitungsregeln, Monotoniesatz, Def. und Kriterien für EP usw. als Übergang zum nächsten Modul
</td></tr>
</table>

THEMA: ANWENDUNG UND WEITERENTWICKLUNG VON KRITERIEN UND VERFAHREN ZUR UNTERSUCHUNG VON FUNKTIONEN (E-A4)

ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN	VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN: *Die Schülerinnen und Schüler* • leiten Funktionen graphisch ab • nennen die Kosinusfunktion als Ableitung der Sinusfunktion • begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen • nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten • wenden die Summen- und Faktorregel auf ganzrationale Funktionen an • lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern oder Substituieren auf lineare und quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne digitale Hilfsmittel • verwenden das notwendige Kriterium und das Vorzeichenwechselkriterium zur Bestimmung von Extrempunkten • unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich • verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen **PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (hier: Zurückführen auf Bekanntes) *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen […]) *(Begründen)* • erkennen fehlerhafte Argumentationsketten und korrigieren sie *(Beurteilen)*	Ein kurzes Wiederaufgreifen des graphischen Ableitens am Beispiel der Sinusfunktion führt zur Entdeckung, dass die Kosinusfunktion deren Ableitung ist. Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonieintervallen und der vier möglichen Vorzeichenwechsel an den Nullstellen der Ableitung untersucht. Die Schülerinnen und Schüler üben damit, vorstellungsbezogen zu argumentieren. Die Untersuchungen auf Symmetrien und Globalverhalten werden fortgesetzt. Bezüglich der Lösung von Gleichungen im Zusammenhang mit der Nullstellenbestimmung wird durch geeignete Aufgaben Gelegenheit zum Üben von Lösungsverfahren ohne Verwendung des GTR gegeben. *Der logische Unterschied zwischen notwendigen und hinreichenden Kriterien kann durch Multiple-Choice-Aufgaben vertieft werden, die rund um die Thematik der Funktionsuntersuchung von Polynomfunktionen Begründungsanlässe und die Möglichkeit der Einübung zentraler Begriffe bieten.* Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms argumentieren. So erzwingt z. B. Achsensymmetrie die Existenz eines Extrempunktes auf der Symmetrieachse. *Beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen können auch Tangentengleichungen bestimmt werden.*

Einführungsphase: Stochastik (S)

<table>
<tr><th colspan="2">THEMA: SIMULATION, EXPERIMENTE UND DATEN FÜR DIE BEGRIFFSBILDUNG BEIM WIEDEREINSTIEG IN DIE STOCHASTIK IN DER OBERSTUFE (E-S1)</th></tr>
<tr><th>ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN</th><th>VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN</th></tr>
<tr><td>INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN:
Die Schülerinnen und Schüler
• deuten Alltagssituationen als Zufallsexperimente
• simulieren Zufallsexperimente
• verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen
• stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf und führen Erwartungswertbetrachtungen durch

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
• treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
• übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
• beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)
Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
… Generieren von Zufallszahlen
… Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
… Erstellen der Histogramme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
… Berechnen der Kennzahlen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Erwartungswert)
• reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge</td><td>– Orientierung an Beispielaufgaben zur ZKL

– Darüber hinaus möglich:

○ Unterrichtsaktivität Multiple Choice Test (2 Std.)

○ Genauigkeit von Simulationen über die Lage von relativen Häufigkeiten im 95%-Prognosebereich (3 Std.)

○ Aktivierung des Vorwissens aus der Sekundarstufe I über den simulations-gestützten Zugang zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen und deren Darstellung an Beispielen aus der Materialsammlung (2 Std.)

○ Erwartungswert einer Zufallsgröße über Fairnessbetrachtung in Spielsituationen (2 Std.)</td></tr>
</table>

THEMA: STOCHASTISCHE MODELLBILDUNG, UNABHÄNGIGKEIT UND ABHÄNGIGKEIT (E-S2)

ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN	VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN: *Die Schülerinnen und Schüler* • modellieren Sachverhalte mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vier- oder Mehrfeldertafeln • beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Pfadregeln • bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten • prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit • bearbeiten Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten. **PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten […] *(Rezipieren)* • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar (*Produzieren)* • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität (*Diskutieren*) ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum …Berechnen der Kennzahlen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Erwartungswert), …Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen,	– Orientierung an Beispielaufgaben zur ZKL – Darüber hinaus möglich: – Einstieg über die Erhebung und Auswertung von zwei binären Merkmalen (2 Std.) – Darstellung von Realdaten in Mehrfeldertafeln und Betrachtung der Baumdiagramme (1 Std.) – Definition der stochastischen Unabhängigkeit (1 Std.) – Kritischer Umgang mit stochastischer Unabhängigkeit bei Realdaten durch Betrachtung von Simulationsstreuungen (1Std.) – Umkehrung von Baumdiagrammen (2 Std.) – Anwendung und Übung in Gesundheitskontexten (2 Std.) - Empfehlung: Satz von Bayes

<table>
<tr><th colspan="2">THEMA: UNTERWEGS IN 3D – MATHEMATISCHE BETRACHTUNGEN DES RAUMES (E-G1)</th></tr>
<tr><th>ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN</th><th>VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN</th></tr>
<tr><td>INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN:
Die Schülerinnen und Schüler
• wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum
• stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinaten-system dar

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
• erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)

Kommunizieren (Produzieren)
Die Schülerinnen und Schüler
• wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus
• wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen</td><td>- Mindmap zum Abrufen von Vorwissen zu bekannten Koordinatisierungen (GPS, geographische Koordinaten, ...)
→ bei Auftreten anderer Arten von Koordinaten (außer kartesischen) ggf. Aufgreifen (z.B. Polarkoordinaten, Kugelkoordinaten), z.B. in Form eines Schülerreferates
- Klassenraum als Koordinatensystem, Schachbrett, Spidercam → hand-lungs- und anschauungsorientierte Herangehensweise
- Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens anhand von Schrägbil-dern geeigneter geometrischer Modelle (z.B. einfaches Würfelgebäude) aus verschiedenen Perspektiven (Grund-, Auf-, Seitenriss)
- Basteln eigener klappbarer 3D-Koordinatensysteme</td></tr>
</table>

THEMA: VEKTOREN ZUR DARSTELLUNG VON BEWEGUNGEN IM RAUM (E-G2)

ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN	VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN: *Die Schülerinnen und Schüler* • deuten Vektoren (in Koordinatendarstellung) als Verschiebungen und kennzeichnen Punkte im Raum durch Ortsvektoren • stellen gerichtete Größen (z. B. Geschwindigkeit, Kraft) durch Vektoren dar • berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mit Hilfe des Satzes von Pythagoras • addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität • weisen Eigenschaften von besonderen Dreiecken und Vierecken mithilfe von Vektoren nach **PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen Muster und Beziehungen (*Erkunden*) • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (*Lösen*) • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein (*Lösen*) • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus (*Lösen*) ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren (*Rezipieren*) ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf (*Vermuten*) • unterstützen Vermutungen beispielgebunden (*Vermuten*) • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (*Begründen*)	- Einführung des Vektors als n-Tupel von Zahlen, geometrische Interpretation als Verschiebung im Raum - Schachbrett, Parkettierungen und/oder Spidercam zur Erarbeitung von Verschiebungen in der Ebene bzw. im Raum - Vektoren zur Darstellung von Kräften und Geschwindigkeiten nutzen (Vielfältigkeit der Interpretation von Vektoren) - Länge eines Vektors bzw. Abstände zwischen Punkten werden an verschiedenen Beispielen (verschiedene Kontexte) thematisiert - Erarbeitung des Rechnens mit Vektoren anhand von „sich bewegenden Objekten“ (zurückgelegte Strecken, Teilstrecken, direkter Weg, ...) - Kollinearität kann im Zusammenhang mit besonderen Vierecken erarbeitet werden - Besondere Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken können insbesondere durch Untersuchung von Diagonalen (Vierecke), Auffinden von „Mittelpunkten“ (Schwerpunkt im Dreieck) und Parallelität nachgewiesen werden

qualifikationsphase Grundkurs Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

THEMA: AUF KOLLISIONSKURS? – BESCHREIBUNG VON BEWEGUNGEN UND SITUATIONEN DURCH GERADEN SOWIE UNTERSUCHUNG VON LAGEBEZIEHUNGEN (Q-GK-G1)	
ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN	**VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN**
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar • interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext • untersuchen Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden [...] • berechnen Schnittpunkte von Geraden [...] und deuten sie im Sachkontext • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind **PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)*	Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens findet eine kurze Wiederholung der Inhalte aus der EP (E-G1 und E-G2) statt. Hierzu bietet sich z.B. eine vorgeschaltete Langzeit-HA mit selbstständiger Wiederholung anhand des Lehrbuchs (LS Kap. V.1) an, die zu Beginn des UVs abgerufen wird. Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Fahrzeugbewegungen (2D) und Flugbahnen (Kondensstreifen) (3D) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS (GTR!) dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden. Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. (Ggf. werden durch Einschränkung des Definitionsbereiches Strecken einbezogen.) Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen sollen auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden. Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden (typische Abituraufgaben!). Der Einsatz der DGS bietet hier die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann. Inhaltlich schließt

• stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober- / Unterbegriff) *(Begründen)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren) ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen Geodreiecke, grafikfähige Taschenrechner und Dynamische-Geometrie-Software • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum --- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen ... grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden ... Darstellen von Objekten im Raum ... nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen ... entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus ... reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge	die Behandlung von Schrägbildern an das Thema E-G1 an. ___ *Hinweis: Bei zweidimensionalen Abbildungen (z. B. Fotografien) räumlicher Situationen geht in der Regel die Information über die Lagebeziehung von Objekten verloren. Verfeinerte Darstellungsweisen (z. B. unterbrochene Linien, schraffierte Flächen, gedrehtes Koordinatensystem) helfen, dies zu vermeiden und Lagebeziehungen systematisch zu untersuchen.* Der Fokus der Untersuchung von Lagebeziehungen liegt auf dem logischen Aspekt einer vollständigen Klassifizierung sowie einer präzisen Begriffsbildung (z. B. Trennung der Begriffe „parallel“, „echt parallel“, „identisch“). Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Solche Darstellungen können von den SuS auch selbstständig entwickelt und auf Lernplakaten dokumentiert, präsentiert, verglichen und hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit beurteilt werde. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens sollen nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden. Als Kontext kann dazu die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) (s.o.) wieder aufgegriffen werden, vgl. hierzu auch die zur Verfügung gestellte Unterrichtsreihe „Von der Schnittpunktberechnung zur Untersuchung der Lagebeziehungen zweier Geraden“ (wird noch passend überarbeitet). Hierbei wird zur Lösung der entstehenden LGS zunächst der GTR verwendet, händische und hilfsmittelfreie Lösung erfolgt bei passenden weiteren Übungsaufgaben (mit einfachen Werten). In dem Zusammenhang wird evtl. die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten relevant. Bei genügend zur Verfügung stehender Zeit oder binnendifferenziert könnte (über den Kernlehrplan hinausgehend) das Abstandsminimum numerisch, grafisch oder algebraisch mit den Verfahren der Analysis ermittelt werden. Begrifflich davon abgegrenzt wird der Abstand zwischen den Flugbahnen. Dies motiviert die Beschäftigung mit orthogonalen Hilfsgeraden (Q-GK-G2).

THEMA: ALLES SENKRECHT? – SKALARPRODUKT ZUR UNTERSUCHUNG AUF ORTHOGONALITÄT UND WINKEL (Q-GK-G2)

ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN	**VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN**
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN: *Die Schülerinnen und Schüler* • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • untersuchen mit Hilfe des Skalarproduktes geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonaliät, Winkel- und Längenberechnung) **PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)*	Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt (vgl. Lehrbuch LS Kap.V.4). Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont (LS Kap. V.5). Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt (alternativ zu einer Herleitung aus dem Kosinussatz). Eine weitere Bedeutung des Skalarproduktes kann mit den gleichen Überlegungen am Beispiel der physikalischen Arbeit erschlossen werden. Bei hinreichend zur Verfügung stehender Zeit kann (über den KLP hinausgehend) in Anwendungskontexten (z. B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes, vgl. Q-GK-G1) entdeckt werden, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. als Streckenlänge über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Bei dieser Problemstellung sollten unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen werden. *Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für (im Sinne des Problemlösens offen angelegte) exemplarische geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte (z. B. Gebäude) bezogen werden. Dabei kann z. B. der Nachweis von Dreiecks- bzw. Viereckstypen (anknüpfend an das Thema E-G2) wieder aufgenommen werden. Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt.*

THEMA: LINEARE ALGEBRA ZUR LÖSUNG GEOMETRISCHER PROBLEME (EBENEN) (Q-GK-G3)

ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN	VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Ebenen in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen [...] zwischen Geraden und Ebenen • berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen **PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, [...]) *(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)* • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler*	Als Einstiegskontext für die Parametrisierung einer Ebene kann eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten dienen. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G2 wieder aufgegriffen. Wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, können durch Einschränkung des Definitionsbereichs Parallelogramme und Dreiecke beschrieben und auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden, die über die Kompetenzerwartungen des KLP hinausgehen. In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösekompetenzen erworben, indem sich heuristische Strategien bewusst gemacht werden (eine planerische Skizze anfertigen, die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt beschreiben, geometrische Hilfsobjekte einführen, bekannte Verfahren zielgerichtet einsetzen und in komplexeren Abläufen kombinieren und unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt vergleichen). Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem. Die Untersuchung von Schattenwürfen eines Mastes auf eine Dachfläche z. B. motiviert eine Fortführung der systematischen Auseinandersetzung mit linearen Gleichungssystemen, mit der Matrix-Vektor-Schreibweise und mit dem Gauß-Verfahren. Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt, zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung sollte stets deutlich werden.

• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum --- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen	

<table>
<tr><th colspan="2">THEMA: EIGENSCHAFTEN VON FUNKTIONEN (HÖHERE ABLEITUNGEN, BESONDERE PUNKTE VON FUNKTIONSGRAPHEN, FUNKTIONEN BESTIMMEN, PARAMETER) (Q-GK-A1)</th></tr>
<tr><th>ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN</th><th>VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN</th></tr>
<tr><td>

INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN:

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung
- verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten
- führen Extremalprobleme durch Kombination der Zielfunktion mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben (Steckbriefaufgaben)
- beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
- wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind
- interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):

Modellieren

Mathematisieren
zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen,
mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells erarbeiten,

Validieren die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen
die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung beurteilen.

Problemlösen

Erkunden Fragen zu einer gegebenen Problemsituation finden und stellen
einfache und komplexe mathematische Probleme erkennen und formulieren,
analysieren und strukturieren die Problemsituation

Lösen Ideen für mögliche Lösungswege entwickeln,
ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung

</td><td>

Material: Lambacher Schweizer Kapitel I

Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung" des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme gewählt werden.

Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet.

Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. *Es wird deshalb empfohlen, den Lernenden hinreichend Zeit zu geben, u. a. mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen.*
An Problemen, die auf quadratische Zielfunktionen führen, sollten auch unterschiedliche Lösungswege aufgezeigt und verglichen werden. Hier bietet es sich außerdem an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben.

An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe" oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs").
Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik untersucht.

Abschließend empfiehlt es sich, ein Problem zu behandeln, das die Schülerinnen und Schüler nur durch systematisches Probieren oder anhand des Funktionsgraphen lösen können: Aufgabe zum „schnellsten Weg".

Anknüpfend an die Einführungsphase werden an einem Beispiel in einem geeigneten Kontext (z. B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Anschließend werden aus gegebenen Punkten Gleichungssysteme für die Parameter der Normalform aufgestellt.

</td></tr>
</table>

einsetzen, einschränkende Bedingungen berücksichtigen einen Lösungsplan zielgerichtet ausführen **Argumentieren** *Begründen* mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen nutzen, vermehrt logische Strukturen berücksichtigen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen), **Werkzeuge nutzen** Digitale Werkzeuge nutzen zum • Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen • grafischen Messen von Steigungen • Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle verwenden • Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle • zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen	Designobjekte oder architektonische Formen können zum Anlass genommen werden, die Funktionsklassen zur Modellierung auf ganzrationale Funktionen 3. oder 4. Grades zu erweitern und über gegebene Punkte, Symmetrieüberlegungen und Bedingungen an die Ableitung Gleichungen zur Bestimmung der Parameter aufzustellen. *Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser" zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen.*

THEMA: DAS INTEGRAL, EIN SCHLÜSSELKONZEPT (VON DER ÄNDERUNGSRATE ZUM BESTAND, INTEGRAL UND FLÄCHENINHALT) (Q-GK-A2)

<table>
<tr><th>ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN</th><th>VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN</th></tr>
<tr><td>
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN:
Die Schülerinnen und Schüler

interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe
deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext
skizzieren zu einer Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion
erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs
erläutern geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen
nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen
ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate
ermitteln Flächeninhalte mit Hilfe von bestimmten Integralen
bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):
Argumentieren
Vermuten Vermutungen aufstellen,
Vermutungen beispielgebunden unterstützen,
Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur präzisieren,
Begründen Zusammenhänge zwischen Begriffen herstellen (Ober- / Unterbegriff)
vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise erklären

Kommunizieren
Rezipieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus authentischen Texten, mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen erfassen, strukturieren und formalisieren,
</td><td>
Material: Lambacher Schweizer Kapitel II

Schülerinnen und Schüler sollen hier entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist. Dazu kann das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben entwickelte numerische Näherungsverfahren auf den Fall angewendet werden, dass für die Änderungsrate ein Funktionsterm gegeben ist.
Die Graphen der Änderungsrate und der Bestandsfunktion können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen.
Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen.
Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert.

Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln erarbeitet.

In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Gesamtbeständen zur Verfügung.

Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt.

Komplexere Übungsaufgaben sollten am Ende des Unterrichtsvorhabens bearbeitet werden, um Vernetzungen mit den Kompetenzen der bisherigen Unterrichtsvorhaben (Funktionsuntersuchungen, Aufstellen von Funktionen aus Bedingungen) herzustellen.
</td></tr>
</table>

Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren beschreiben, mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen erläutern. *Produzieren* eigene Überlegungen formulieren und eigene Lösungswege beschreiben, begründet eine geeignete Darstellungsform auswählen, flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen wechseln, Arbeitsschritte nachvollziehbar dokumentieren, Ausarbeitungen erstellen und präsentieren **Werkzeuge nutzen** Digitale Werkzeuge nutzen zum • Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse • Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrales	

Qualifikationsphase Grundkurs Stochastik (S)

THEMA: KENNGRÖßEN VON WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN, BINOMIALVERTEILUNG (Q-GK-S1)	
ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN	**VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN**
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN: *Die Schülerinnen und Schüler* • untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben • erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen • verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente • berechnen die Binomialverteilung und erklären damit Wahrscheinlichkeiten • beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung • nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen • schließen anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit **PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf konkrete Fragestellungen (*Strukturieren)* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (*Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter […] Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler*	*Die Angaben beziehen sich auf das Kapitel VIII „Wahrscheinlichkeit – Statistik“ des Lehrwerk Lambacher Schweizer:* – *1: Daten darstellen und durch Kenngrößen beschreiben (3 Std.)* – *2: Erwartungswert und Standardabweichung von Zufallsgrößen (3 Std.)* – *3: Bernoulli-Experimente, Binomialverteilung (3 Std.)* – *4: Praxis der Binomialverteilung (4 Std.): Zum Schließen von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit empfiehlt es sich im Buch (LS Gesamtband) S. 290 Nr. 13 und S. 294 Nr. 15 zu bearbeiten.* – *5: Problemlösen mit der Binomialverteilung (4 Std.)*

• finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation *(Erkunden)* • überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen *(Reflektieren)* • interpretieren Ergebnisse vor dem Hintergrund der Fragestellung *(Reflektieren)* • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)* **Kommunizieren** *Die Schülerinnen und Schüler* • nehmen begründet und konstruktiv zu mathematikhaltigen, auch fehlerbe-haf-teten Aussagen und Darstellungen Stellung *(Diskutieren)* • führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei *(Diskutieren)* **Argumentieren** *Die Schülerinnen und Schüler* • verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten • erkennen und vervollständigen lückenhafte Argumentationsketten • erkennen und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können • beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihrer Reichweite und Übertrag-barkeit ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen verschiedene digitale Werkzeuge zum ...Generieren von Zufallszahlen, ...Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten, ...Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ...Erstellen der Histogramme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ...Berechnen der Kennzahlen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ...Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen	

THEMA: EXPONENTIALFUNKTION (UND ABLEITUNGEN) (Q-GK-A3)

ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN	VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen sowie die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion • bilden die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion und von Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis • bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen und deren Ableitung • untersuchen Wachstums-und Zerfallsprozesse mit Hilfe funktionaler Ansätze **PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):** **Modellieren** *Validieren* die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen, die Angemessenheit aufgestellter Modelle für die Fragestellung beurteilen und verbessern **Problemlösen** *Erkunden* einfache und komplexe mathematische Probleme erkennen und formulieren *Lösen* ausgewählte Routineverfahren auch Hilfsmittelfrei zur Lösung einsetzen, Werkzeuge auswählen, die den Lösungsweg unterstützen, geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung auswählen, einschränkende Bedingungen berücksichtigen *Reflektieren* variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung **Argumentieren** *Begründen* mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen nutzen, überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können **Werkzeuge nutzen** Digitale Werkzeuge nutzen zum	Material: Lambacher Schweizer Kapitel III Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens empfiehlt sich eine Auffrischung der bereits in der EP erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte in Gruppenarbeit mit Präsentation (Wachstum und Zerfall) Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Im **LK** kann die Eulersche Zahl z.B. über das Problem der stetigen Verzinsung eingeführt werden. Der Grenzübergang wird dabei zunächst durch den GTR unterstützt. Da der Rechner dabei numerisch an seine Grenzen stößt, wird aber auch eine Auseinandersetzung mit dem Grenzwertbegriff motiviert. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet. Umgekehrt suchen die Lernenden zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle. (mit Wertetabelle, die verfeinert wird oder durch Experimentieren in der Grafik des GTR, indem sie Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion legen. Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich quasi die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen. **Für den LK:** Umkehrprobleme im Zusammenhang mit der natürlichen Exponentialfunktion werden genutzt, um den natürlichen Logarithmus zu definieren und damit auch alle Exponentialfunktionen auf die Basis e zurückzuführen.

• erkunden • Darstellen von Funktionen (graphisch und als Wertetabelle) • grafischen Messen von Steigungen • Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle verwenden	

THEMA: UNTERSUCHUNG ZUSAMMENGESETZTER FUNKTIONEN (PRODUKTREGEL, KETTENREGEL) (Q-GK-A4)

<table>
<tr><th>ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN</th><th>VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN</th></tr>
<tr><td>

INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN:
Die Schülerinnen und Schüler

bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung)
wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen an
wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an
verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem-und Wendepunkten
interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):
Problemlösen
Lösen heuristische Strategien und Prinzipien nutzen, Werkzeuge auswählen, die den Lösungsweg unterstützen, geeignete Begriffe , Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung auswählen
Argumentieren
Begründen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen nutzen),
Beurteilen lückenhafte oder fehlerhafte Argumentationsketten erkennen und korrigieren
Kommunizieren
Produzieren eigene Überlegungen formulieren und eigene Lösungswege beschreiben, Fachsprache und fachspezifische Notation verwenden
Werkzeuge nutzen
Digitale Werkzeuge nutzen zum

zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen,
grafischen Messen von Steigungen
Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle verwenden

</td><td>

Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten wird die Kettenregel eingeführt, um auch (hilfsmittelfrei) Ableitungen für die entsprechenden Funktionsterme bilden zu können. Als Beispiel für eine Summenfunktion wird eine Kettenlinie modelliert. An mindestens einem Beispiel sollte auch ein beschränktes Wachstum untersucht werden.

An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen) wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen erarbeitet. In diesem Zusammenhang wird die Produktregel zum Ableiten eingeführt.

In diesen Kontexten ergeben sich ebenfalls Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird.

Parameter werden nur in konkreten Kontexten exemplarisch variiert (keine systematische Untersuchung von Funktionenscharen). Dabei werden z.B. zahlenmäßige Änderungen des Funktionsterms bezgl. Ihrer Auswirkung untersucht und im Hinblick auf den Kontext interpretiert.
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">THEMA: STOCHASTISCHE PROZESSE (Q-GK-S2)</td></tr>
<tr><td>ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN</td><td>VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN</td></tr>
<tr><td>
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN:
Die Schülerinnen und Schüler

beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen
verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände)

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler

treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu (Mathematisieren)

Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler

analysieren und strukturieren eine gegebene Problemsituation (Erkunden)
wählen heuristische Hilfsmittel aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden)
erkennen Muster und Beziehungen (Erkunden)

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler

nutzen verschiedene digitale Werkzeuge zum
... Durchführen von Operationen mit Vektoren und Matrizen
reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge

</td><td>
Die Angaben beziehen sich auf das Kapitel X „Stochastische Prozesse“ des Lehrwerk Lambacher Schweizer:

1: Stochastische Prozesse (2 Std.)
2: Stochastische Matrizen (2 Std.)
3: Matrizen multiplizieren (1 Std.)
4: Potenzen von Matrizen – Grenzverhalten (3 Std.)

In den Kapiteln sind grundlegende Aufgaben, die ohne Hilfsmittel gelöst werden sollen (hilfsmittelfreier Teil) gekennzeichnet, ebenso Aufgaben, für die der GTR benötigt wird. Bei allen anderen Aufgaben sollen die Schülerinnen und Schüler selbst entscheiden, ob sie einen Werkzeugeinsatz für hilfreich halten. Im Anhang sind die in diesem Band verwendeten Funktionen des GTR für die beiden gängigsten Modelle erläutert.
</td></tr>
</table>

THEMA: AUF KOLLISIONSKURS? – BESCHREIBUNG VON BEWEGUNGEN UND SITUATIONEN DURCH GERADEN SOWIE UNTERSUCHUNG VON LAGEBEZIEHUNGEN (Q-LK-G1)	
ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN	**VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN**
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Geraden in Parameterform dar • interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext • stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden [...] • berechnen Schnittpunkte von Geraden [...] und deuten sie im Sachkontext • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind **PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler*	Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens findet eine kurze Wiederholung der Inhalte aus der EP (E-G1 und E-G2) statt. Hierzu bietet sich z.B. eine vorgeschaltete Langzeit-HA mit selbstständiger Wiederholung anhand des Lehrbuchs (LS Kap. V.1) an, die zu Beginn des UVs abgerufen wird. Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Fahrzeugbewegungen (2D) und Flugbahnen (Kondensstreifen) (3D) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS (GTR!) dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden. Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs werden Strahlen und Strecken einbezogen. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen sollen auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden. Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden (typische Abituraufgaben!). Der Einsatz der DGS bietet hier die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann. Inhaltlich schließt

• präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober- / Unterbegriff) *(Begründen)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen Geodreiecke, grafikfähige Taschenrechner und Dynamische-Geometrie-Software • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum --- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen ... grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden ... Darstellen von Objekten im Raum ... nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen ... entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus ... reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge	die Behandlung von Schrägbildern an das Thema E-G1 an. --- *Hinweis: Bei zweidimensionalen Abbildungen (z. B. Fotografien) räumlicher Situationen geht in der Regel die Information über die Lagebeziehung von Objekten verloren. Verfeinerte Darstellungsweisen (z. B. unterbrochene Linien, schraffierte Flächen, gedrehtes Koordinatensystem) helfen, dies zu vermeiden und Lagebeziehungen systematisch zu untersuchen.* Der Fokus der Untersuchung von Lagebeziehungen liegt auf dem logischen Aspekt einer vollständigen Klassifizierung sowie einer präzisen Begriffsbildung (z. B. Trennung der Begriffe „parallel“, „echt parallel“, „identisch“). Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Solche Darstellungen können von den SuS auch selbstständig entwickelt und auf Lernplakaten dokumentiert, präsentiert, verglichen und hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit beurteilt werde. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens sollen nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden. Als Kontext kann dazu die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) (s.o.) wieder aufgegriffen werden, vgl. hierzu auch die zur Verfügung gestellte Unterrichtsreihe „Von der Schnittpunktberechnung zur Untersuchung der Lagebeziehungen zweier Geraden“ (wird noch passend überarbeitet). Hierbei wird zur Lösung der entstehenden LGS zunächst der GTR verwendet, händische und hilfsmittelfreie Lösung erfolgt bei passenden weiteren Übungsaufgaben. In dem Zusammenhang wird evtl. die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten relevant. Bei genügend zur Verfügung stehender Zeit oder binnendifferenziert bietet sich bereits an dieser Stelle an, das Abstandsminimum numerisch, grafisch oder algebraisch mit den Verfahren der Analysis ermitteln zu lassen. Begrifflich davon abgegrenzt wird der Abstand zwischen den Flugbahnen. Dies motiviert die Beschäftigung mit orthogonalen Hilfsgeraden (Q-LK-G2/G4).

THEMA: ALLES SENKRECHT? – SKALARPRODUKT ZUR UNTERSUCHUNG AUF ORTHOGONALITÄT UND WINKEL (Q-LK-G2)

ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN	VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN: *Die Schülerinnen und Schüler* • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • untersuchen mit Hilfe des Skalarproduktes geometische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonaliät, Winkel- und Längenberechnung) **PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)*	Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt (vgl. Lehrbuch LS Kap.V.4). Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont (LS Kap. V.5). Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt (alternativ zu einer Herleitung aus dem Kosinussatz). Eine weitere Bedeutung des Skalarproduktes kann mit den gleichen Überlegungen am Beispiel der physikalischen Arbeit erschlossen werden. In Anwendungskontexten (z. B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes, vgl. Q-LK-G1/4) kann entdeckt werden, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. als Streckenlänge über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Bei dieser Problemstellung sollten unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen werden. *Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für (im Sinne des Problemlösens offen angelegte) exemplarische geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte (z. B. Gebäude) bezogen werden.* *Dabei kann z. B. der Nachweis von Dreiecks- bzw. Viereckstypen (anknüpfend an das Thema E-G2) wieder aufgenommen werden. Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt.*

THEMA: LINEARE ALGEBRA ZUR LÖSUNG GEOMETRISCHER PROBLEME (EBENEN) (Q-LK-G3)

<table>
<tr><th>ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN</th><th>VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN</th></tr>
<tr><td>
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN:
Die Schülerinnen und Schüler

stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar
stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar
untersuchen Lagebeziehungen […] zwischen Geraden und Ebenen
berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext
stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar
beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):
Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler

wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden)
entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen)
wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen (Lösen)
nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) (Lösen)
führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (Lösen)
vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten (Reflektieren)
beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz (Reflektieren)
analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern (Reflektieren)
variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung (Reflektieren)

</td><td>
Als Einstiegskontext für die Parametrisierung einer Ebene kann eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten dienen. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G2 wieder aufgegriffen.
Durch Einschränkung des Definitionsbereichs können Parallelogramme und Dreiecke beschrieben und auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden.
In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösekompetenzen erworben, indem sich heuristische Strategien bewusst gemacht werden (eine planerische Skizze anfertigen, die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt beschreiben, geometrische Hilfsobjekte einführen, bekannte Verfahren zielgerichtet einsetzen und in komplexeren Abläufen kombinieren und unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt vergleichen).
Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem.
Die Untersuchung von Schattenwürfen eines Mastes auf eine Dachfläche z. B. motiviert eine Fortführung der systematischen Auseinandersetzung mit linearen Gleichungssystemen, mit der Matrix-Vektor-Schreibweise und mit dem Gauß-Verfahren.
Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt, zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung sollte stets deutlich werden.
Die Koordinatenform für Ebenen kann durch die deutlich einfachere Berechnung von z.B. Durchstoßpunkten ohne digitale Werkzeuge motiviert werden und sollte möglichst schon über den Umweg der Normalenform hergeleitet werden.
</td></tr>
</table>

Werkzeuge nutzen *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum --- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen	

THEMA: WEIT ODER NAH? – BESTIMMUNG VON ABSTÄNDEN ZWISCHEN GEOMETRISCHEN OBJEKTEN (Q-LK-G4)

<table>
<tr><th>ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN</th><th>VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN</th></tr>
<tr><td>
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN:
Die Schülerinnen und Schüler

stellen Ebenen in Normalenform und nutzen diese zur Orientierung im Raum
bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):
Argumentieren
Die Schülerinnen und Schüler

präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten)
stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff) (Begründen)
nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen)
berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige/hinreichende Bedingung, Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) (Begründen)
überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen)

Kommunizieren
Die Schülerinnen und Schüler

erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen (Rezipieren)
verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang (Produzieren)
wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren)
erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (Produzieren)
vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität (Diskutieren)

</td><td>
Als ein Kontext kann die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) aus Thema Q-LK-G1 wieder aufgenommen werden, insbesondere mit dem Ziel, die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten im Unterschied zur Abstandsberechnung zwischen den Flugbahnen zu vertiefen. Hier bietet sich wiederum eine Vernetzung mit den Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung an.
Die Berechnung des Abstandes zweier Flugbahnen kann für den Vergleich unterschiedlicher Lösungsvarianten genutzt werden. Dabei wird unterschieden, ob die Lotfußpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke mitberechnet werden oder nachträglich aus dem Abstand bestimmt werden müssen.

Es sollte Wert darauf gelegt werden, dass jeweils die verschiedenen möglichen Wege zur Abstandsbestimmung thematisiert werden (verschiedene Zugangswege) und ggf. Vor- und Nachteile diskutiert werden. Hierbei sollte dann die Hesse’sche Normalenform zu gegebenem Zeitpunkt zur Vereinfachung einiger Berechnungen eingeführt werden.
</td></tr>
</table>

THEMA: EIGENSCHAFTEN VON FUNKTIONEN (HÖHERE ABLEITUNGEN, BESONDERE PUNKTE VON FUNKTIONSGRAPHEN, FUNKTIONEN BESTIMMEN, PARAMETER) (Q-LK-A1)

ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN	VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten • führen Extremalprobleme durch Kombination der Zielfunktion mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese • bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“) • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind • interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionenscharen • deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen **PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):** **Modellieren** *Mathematisieren* zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen, mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells erarbeiten, *Validieren* die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung beurteilen. **Problemlösen** *Erkunden* Fragen zu einer gegebenen Problemsituation finden und stellen einfache und komplexe mathematische Probleme erkennen und formulieren, analysieren und strukturieren die Problemsituation,	Material: Lambacher Schweizer Kapitel I Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme gewählt werden. Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet. Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. *Es wird deshalb empfohlen, den Lernenden hinreichend Zeit zu geben, u. a. mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen.* An Problemen, die auf quadratische Zielfunktionen führen, sollten auch unterschiedliche Lösungswege aufgezeigt und verglichen werden. Hier bietet es sich außerdem an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben. An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“). Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik untersucht. *Abschließend empfiehlt es sich, ein Problem zu behandeln, das die Schülerinnen und Schüler nur durch systematisches Probieren oder anhand des Funktionsgraphen lösen können: Aufgabe zum „schnellsten Weg“.* Anknüpfend an die Einführungsphase werden an einem Beispiel in einem geeigneten Kontext (z. B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Anschließend werden aus gegebenen Punkten Gleichungssysteme für die Parameter der Normalform aufgestellt.

Lösen Ideen für mögliche Lösungswege entwickeln, ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung einsetzen, einschränkende Bedingungen berücksichtigen einen Lösungsplan zielgerichtet ausführen Werkzeuge, die den Lösungsweg unterstützen, auswählen **Argumentieren** *Begründen* mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen nutzen, vermehrt logische Strukturen berücksichtigen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen), **Werkzeuge nutzen** Digitale Werkzeuge nutzen zum • Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen • grafischen Messen von Steigungen • Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle verwenden • Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle • zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen	Designobjekte oder architektonische Formen können zum Anlass genommen werden, die Funktionsklassen zur Modellierung auf ganzrationale Funktionen 3. oder 4. Grades zu erweitern und über gegebene Punkte, Symmetrieüberlegungen und Bedingungen an die Ableitung Gleichungen zur Bestimmung der Parameter aufzustellen. *Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser" zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen.*

THEMA: DAS INTEGRAL, EIN SCHLÜSSELKONZEPT (VON DER ÄNDERUNGSRATE ZUM BESTAND, INTEGRAL UND FLÄCHENINHALT, INTEGRALFUNKTION) (Q-LK-A2)

<table>
<tr><th>ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN</th><th>VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN</th></tr>
<tr><td>

INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN:
Die Schülerinnen und Schüler

interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe
deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext
skizzieren zu einer Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion
erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs
erläutern den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion
begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs
bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen
nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen
ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion
bestimmen Integrale numerisch und mithilfe von gegebenen oder Nachschlagewerken entnommenen Stammfunktionen
erläutern den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion
bestimmen Flächeninhalte mithilfe von bestimmten und uneigentlichen Integralen
bestimmen Flächeninhalte und Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mit Hilfe von bestimmten und uneigentlichen Integralen

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):
Argumentieren
Vermuten Vermutungen aufstellen,
Vermutungen beispielgebunden unterstützen,
Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur präzisieren,
Begründen Zusammenhänge zwischen Begriffen herstellen (Ober- / Unterbegriff)
vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise erklären
verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten

</td><td>

Material: Lambacher Schweizer Kapitel II

Schülerinnen und Schüler sollen hier entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist. Dazu kann das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben entwickelte numerische Näherungsverfahren auf den Fall angewendet werden, dass für die Änderungsrate ein Funktionsterm gegeben ist.
Die Graphen der Änderungsrate und der Bestandsfunktion können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen.
Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen.
Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert.

Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln erarbeitet.

In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Gesamtbeständen zur Verfügung.

Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt.

Komplexere Übungsaufgaben sollten am Ende des Unterrichtsvorhabens bearbeitet werden, um Vernetzungen mit den Kompetenzen der bisherigen Unterrichtsvorhaben (Funktionsuntersuchungen, Aufstellen von Funktionen aus Bedingungen) herzustellen.

</td></tr>
</table>

Kommunizieren *Rezipieren* Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus authentischen Texten, mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen erfassen, strukturieren und formalisieren, Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren beschreiben, mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen erläutern. *Produzieren* eigene Überlegungen formulieren und eigene Lösungswege beschreiben, begründet eine geeignete Darstellungsform auswählen, flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen wechseln, Arbeitsschritte nachvollziehbar dokumentieren, Ausarbeitungen erstellen und präsentieren **Werkzeuge nutzen** Digitale Werkzeuge nutzen zum • Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse • Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrales	

Qualifikationsphase LEistungskurs Stochastik (S)

<table>
<tr><td colspan="2">THEMA: KENNGRÖßEN VON WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN, BINOMIALVERTEILUNG, TESTEN VON HYPOTHESEN (Q-LK-S1)</td></tr>
<tr><td>ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN</td><td>VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN</td></tr>
<tr><td>INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN:
Die Schülerinnen und Schüler
• untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben
• erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen
• bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen
• verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente
• berechnen die Binomialverteilung und erklären damit Wahrscheinlichkeiten
• erklären die kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten
• beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung
• nutzen die Sigma-Regeln für prognostische Aussagen
• nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen
• schließen anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit
• interpretieren Hypothesentests bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse
• beschreiben und beurteilen Fehler 1. und 2. Art

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
• erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf konkrete Fragestellungen (Strukturieren)
• treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
• übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
• beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)</td><td>Die Angaben beziehen sich auf das Kapitel VIII „Wahrscheinlichkeit – Statistik“ des Lehrwerk Lambacher Schweizer:

– 1: Daten darstellen und durch Kenngrößen beschreiben (3 Std.)

– 2: Erwartungswert und Standardabweichung von Zufallsgrößen (3 Std.)

– 3: Bernoulli-Experimente, Binomialverteilung (4 Std.)

– 4: Praxis der Binomialverteilung (5 Std.): Zum Schließen von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit empfiehlt es sich im Buch (LS Gesamtband) S. 290 Nr. 13 und S. 294 Nr. 15 zu bearbeiten.

– 5: Problemlösen mit der Binomialverteilung (4 Std.)

– 6: Zweiseitiger Signifikanztest (3 Std.)

– 7: Einseitiger Signifikanztest (4 Std.)

– 8: Fehler beim Testen von Hypothesen (3 Std.)

– 9: Signifikanz und Relevanz (2 Std.)</td></tr>
</table>

• beurteilen die Angemessenheit aufgestellter […] Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation *(Erkunden)* • überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen *(Reflektieren)* • interpretieren Ergebnisse vor dem Hintergrund der Fragestellung *(Reflektieren)* • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)* **Kommunizieren** *Die Schülerinnen und Schüler* • nehmen begründet und konstruktiv zu mathematikhaltigen, auch fehlerbe-hafteten Aussagen und Darstellungen Stellung *(Diskutieren)* • führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei *(Diskutieren)* **Argumentieren** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen und vervollständigen lückenhafte Argumentationsketten • erkennen und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können • beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihrer Reichweite und Übertrag-barkeit ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen verschiedene digitale Werkzeuge zum ...Generieren von Zufallszahlen, ...Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten, ...Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ...Erstellen der Histogramme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ...Berechnen der Kennzahlen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ...Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen	

THEMA: EXPONENTIALFUNKTION (NATÜRLICHER LOGARITHMUS, ABLEITUNGEN) (Q-LK-A3)

ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN	VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen sowie die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion • bilden die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion und von Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis • bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen und deren Ableitung • untersuchen Wachstums-und Zerfallsprozesse mit Hilfe funktionaler Ansätze • vergleichen die Qualität der Modellierung exemplarisch mit begrenztem Wachstum • nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion • bilden die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion **PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):** **Modellieren** *Validieren* die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation beziehen, die Angemessenheit aufgestellter Modelle für die Fragestellung beurteilen und verbessern **Problemlösen** *Erkunden* einfache und komplexe mathematische Probleme erkennen und formulieren *Lösen* ausgewählte Routineverfahren auch Hilfsmittelfrei zur Lösung einsetzen, Werkzeuge auswählen, die den Lösungsweg unterstützen, geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung auswählen, einschränkende Bedingungen berücksichtigen *Reflektieren* variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung **Argumentieren** *Begründen* mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen nutzen,	Material: Lambacher Schweizer Kapitel III Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens empfiehlt sich eine Auffrischung der bereits in der EP erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte in Gruppenarbeit mit Präsentation (Wachstum und Zerfall) Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Im **LK** kann die Eulersche Zahl z.B. über das Problem der stetigen Verzinsung eingeführt werden. Der Grenzübergang wird dabei zunächst durch den GTR unterstützt. Da der Rechner dabei numerisch an seine Grenzen stößt, wird aber auch eine Auseinandersetzung mit dem Grenzwertbegriff motiviert. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet. Umgekehrt suchen die Lernenden zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle (mit Wertetabelle, die verfeinert wird oder durch Experimentieren in der Grafik des GTR, indem sie Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion legen). Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich quasi die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen. **Für den LK:** Umkehrprobleme im Zusammenhang mit der natürlichen Exponentialfunktion werden genutzt, um den natürlichen Logarithmus zu definieren und damit auch alle Exponentialfunktionen auf die Basis e zurückzuführen.

überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können **Werkzeuge nutzen** Digitale Werkzeuge nutzen zum • erkunden • Darstellen von Funktionen (graphisch und als Wertetabelle) • grafischen Messen von Steigungen • Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle verwenden	

THEMA: UNTERSUCHUNG ZUSAMMENGESETZTER FUNKTIONEN (PRODUKTREGEL, KETTENREGEL) (Q-LK-A4)

ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN

INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN:

Die Schülerinnen und Schüler

- bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung)
- wenden die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an
- verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem-und Wendepunkten
- interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang
- untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionenscharen
- führen Eigenschaften von zusammengesetzten Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) argumentativ auf deren Bestandteile zurück
- nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion $f(x)=1/x$

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):

Problemlösen

Lösen heuristische Strategien und Prinzipien nutzen, Werkzeuge auswählen, die den Lösungsweg unterstützen, geeignete Begriffe , Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung auswählen

Argumentieren

Begründen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen nutzen),

Beurteilen lückenhafte oder fehlerhafte Argumentationsketten erkennen und korrigieren

Kommunizieren

Produzieren eigene Überlegungen formulieren und eigene Lösungswege beschreiben, Fachsprache und fachspezifische Notation verwenden

Werkzeuge nutzen

Digitale Werkzeuge nutzen zum

VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN

Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten wird die Kettenregel eingeführt, um auch (hilfsmittelfrei) Ableitungen für die entsprechenden Funktionsterme bilden zu können. Als Beispiel für eine Summenfunktion wird eine Kettenlinie modelliert. An mindestens einem Beispiel sollte auch ein beschränktes Wachstum untersucht werden.

An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen) wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen erarbeitet. In diesem Zusammenhang wird die Produktregel zum Ableiten eingeführt.

In diesen Kontexten ergeben sich ebenfalls Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird.

Weitere Kontexte bieten Anlass zu komplexen Modellierungen mit Funktionen anderer Funktionsklassen, insbesondere unter Berücksichtigung von Parametern, für die Einschränkungen des Definitionsbereiches oder Fallunterscheidungen vorgenommen werden müssen.

• zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen, • grafischen Messen von Steigungen • Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle verwenden	

Qualifikationsphase LEistungskurs Stochastik (S)

THEMA: KENNGRÖẞEN VON WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN, NORMALVERTEILUNG, TESTEN VON HYPOTHESEN (Q-LK-S2)	
ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN	**VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN**
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN: *Die Schülerinnen und Schüler* • unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion • beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion (Gauß'sche Glockenkurve) • untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen **PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf konkrete Fragestellungen *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation *(Erkunden)* **Kommunizieren** *Die Schülerinnen und Schüler* • nehmen begründet und konstruktiv zu mathematikhaltigen, auch fehlerbe-hafteten Aussagen und Darstellungen Stellung *(Diskutieren)* • führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei *(Diskutieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum …Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei normallverteilten Zufallsgrößen	*Die Angaben beziehen sich auf das Kapitel IX „Stetige Zufallsgrößen - Normalverteilung" des Lehrwerk Lambacher Schweizer:* – *1: Stetige Zufallsgrößen: Integrale besuchen die Stochastik (4 Std.)* – *2: Die Analyse der Gauß'schen Glockenfunktion (2 Std.)* – *3: Normalverteilung, Satz von de Moivre-Laplace (4 Std.)*

THEMA: STOCHASTISCHE PROZESSE (Q-LK-S3)

<table>
<tr><th>ZU ENTWICKELNDE KOMPETENZEN</th><th>VORHABENBEZOGENE ABSPRACHEN UND EMPFEHLUNGEN</th></tr>
<tr><td>
INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN:
Die Schülerinnen und Schüler

beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen
verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände)

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN (SCHWERPUNKTE):
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler

treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu (Mathematisieren)

Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler

analysieren und strukturieren eine gegebene Problemsituation (Erkunden)
wählen heuristische Hilfsmittel aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden)
erkennen Muster und Beziehungen (Erkunden)

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler

nutzen verschiedene digitale Werkzeuge zum
... Durchführen von Operationen mit Vektoren und Matrizen
reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge

</td><td>
Die Angaben beziehen sich auf das Kapitel X „Stochastische Prozesse“ des Lehrwerk Lambacher Schweizer:

1: Stochastische Prozesse (2 Std.)
2: Stochastische Matrizen (2 Std.)
3: Matrizen multiplizieren (1 Std.)
4: Potenzen von Matrizen – Grenzverhalten (3 Std.)

In den Kapiteln sind grundlegende Aufgaben, die ohne Hilfsmittel gelöst werden sollen (hilfsmittelfreier Teil) gekennzeichnet, ebenso Aufgaben, für die der GTR benötigt wird. Bei allen anderen Aufgaben sollen die Schülerinnen und Schüler selbst entscheiden, ob sie einen Werkzeugeinsatz für hilfreich halten. Im Anhang sind die in diesem Band verwendeten Funktionen des GTR für die beiden gängigsten Modelle erläutert.
</td></tr>
</table>